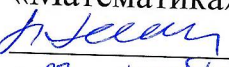


Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»
 В.Н. Деснянский
«28» ноября 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.

В одной школе обучалось вдвое больше девочек, чем мальчиков. Директор школы ввёл обычай: ежедневно поутру каждый мальчик должен был делать поклон директору, каждому из своих товарищей-мальчиков и каждой девочке. Каждая девочка также должна была делать поклон директору, каждой своей подруге и каждому мальчику. Этот церемонный обычай строго соблюдался и поэтому ежедневно утром можно было насчитать 900 поклонов. Сколько в школе было мальчиков и сколько было девочек?

Задание 2.

Разложите на множители:

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$$

Задание 3.

Найдите минимальное значение функции $\varphi(x) = 2x + \frac{18\pi^2}{x} + \cos x$ на интервале $(0; 10)$.

Задание 4.

Сравните два числа: $\sqrt{10 + \sqrt{24 + \sqrt{40 + \sqrt{60}}}}$ и 5,3. Ответ обосновать.

Задание 5.

Решите в целых числах уравнение:

$$x^2 + 2x = y^4 + y^2.$$

Задание 6.

Решите неравенство:

$$\frac{|x - 1| - |x|}{|2x - 3| - |x + 1|} \leq 0$$

Задание 7.

Решите уравнение:

$$\sin^3 x - \sin x \cos 2x - 2 \sin x - 6 \sin^3 x \cos x + \frac{3}{2} \sin 4x + 6 \sin 2x = 0.$$

Задание 8.

В равностороннем (неправильном) пятиугольнике ABCDE угол ABC вдвое больше угла DBE. Найти величину угла ABC.

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю

«Математика»

В.Н. Деснянский

В.Н. Деснянский

«18» ноября

2022 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы**

Вариант 2

Задание 1.

Имеем девять цифр, расположенных по порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Как из этих цифр, не меняя их порядок, и пользуясь знаками «+» и «-» всего три раза получить число 100?

Задание 2.

Разложите на множители:

$$x^5 + x + 1.$$

Задание 3.

Какой знак имеет число $\cos \sqrt{3}$? Ответ обосновать.

Задание 4.

Сравните два числа: $\sqrt{15 + \sqrt{60} + \sqrt{84} + \sqrt{140}}$ и 6,5. Ответ обосновать.

Задание 5.

Решите в натуральных числах уравнение:

$$x^3 + 8x^2 + 42x + 27 = y^3.$$

Задание 6.

Решите неравенство:

$$x^2 - 2x + 3 < \sqrt{4 - x^2}.$$

Задание 7.

Решите уравнение:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 2(\sin 4x - \sin 2x).$$

Задание 8.

Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABE и BEC , причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найти углы треугольника ABC .

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.

Ясно, что каждый школьник и школьница ежедневно делали столько поклонов, сколько было детей в школе. Значит, все дети вместе ежедневно делали столько поклонов, сколько будет, если умножить их общее число само на себя. Итак, мы знаем, что 900 – это число детей, умноженное само на себя. Какое же число, умноженное само на себя, составит 900? Очевидно 30. А так как девочек было вдвое больше, чем мальчиков, то из детей было 20 девочек и 10 мальчиков.

Ответ: 20 девочек и 10 мальчиков

Задание 2.

Так как

$$(c - a)^3 = -(a - c)^3 \text{ и } a - c = (b - c) + (a - b), \text{ то } (b - c)^3 - [(b - c) + (a - b)]^3 + (a - b)^3 = -3(b - c)^2(a - b) - 3(b - c)(a - b)^2 = -3(b - c)(a - c)(a - b) = 3(b - a)(c - b)(c - a).$$

Ответ: $3(b - a)(c - b)(c - a)$

Задание 3.

Так как $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $2x + \frac{18\pi^2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x \cdot 18\pi^2}{x}} = 12\pi$. Но с другой стороны, при

$x = 3\pi < 10$, $\min \cos x = -1$, поэтому $\min f(x)|_{x=3\pi} = 12\pi - 1$

Ответ: $12\pi - 1$

Задание 4.

Имеем $\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 * 3} + 2\sqrt{2 * 5} + 2\sqrt{3 * 5}} =$
 $= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. С другой стороны, имеем $\sqrt{2} > 1,4$; $\sqrt{3} >$
 $> 1,7$; $\sqrt{5} > 2,2$, поэтому $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} > 1,4 + 1,7 + 2,2 = 5,3$. Следовательно,
 первое число (слева) больше второго (справа)

Ответ: первое число больше

Задание 5.

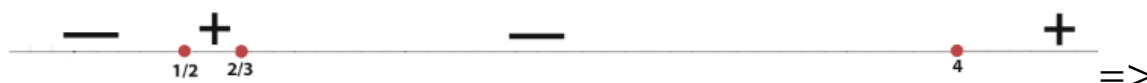
$(y^2)^2 < (x + 1)^2 = y^4 + y^2 + 1 \leq (y^2 + 1)^2$. Отсюда $y = 0$, $x = 0$ или $x = -2$

Ответ: (0;0), (-2;0)

Задание 6.

Если данное неравенство умножить на положительную функцию $\frac{|x-1|+|x|}{|2x-3|+|x+1|}$, то получим равносильное неравенство: $\frac{(x-1)^2-x^2}{(2x-3)^2-(x+1)^2} \leq 0$.

Отсюда $\frac{(x-1-x)(x-1+x)}{(2x-3-x-1)(2x-3+x+1)} \leq 0$. Тогда $\frac{2x-1}{(x-4)(3x-2)} \geq 0$. Решаем методом интервалов:



$\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$; $x > 4$. (т.к. ОДЗ: $x \neq 4$, $x \neq \frac{2}{3}$)

Ответ: $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$

Задание 7.

С помощью группировки данное уравнение можно представить в виде: $(\sin x - 3\sin 2x)(\sin^3 x - \cos 2x - 2) = 0$. Значит равенство нулю будет, если

$\begin{cases} \sin x - 3\sin 2x = 0 \\ \sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0 \end{cases}$. Из первого уравнения системы получим $(\sin x(1 - 6\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m \end{cases}$. Второе уравнение системы имеет решение. Когда $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1, x = \frac{\pi}{2} + \pi s$

Ответ: $k\pi, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, \frac{\pi}{2} + \pi s$

Задание 8.

Из $\angle ABC = 2 \angle DBE$ следует, что $\angle DBE = \angle CBD + \angle ABE$. Возьмем такую точку Р на стороне DE, что $\angle PBE = \angle ABE$. Тогда $\angle PBD = \angle CBD$. Треугольник ABE равнобедренный, так что углы ABE и AEB равны. Из равенства углов AEB и PBE следует, что $BP \parallel AE$ (По обратной теореме о внутренних накрест лежащих углах). Аналогично $CD \parallel BP$ и мы доказали, что AE и CD параллельны. Следовательно, AEDC-параллелограмм и $AC = DE$. Значит треугольник ABC – равносторонний и $\angle ABC = 60^\circ$

Ответ: 60°

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 2

Задание 1.

Ответ: $123 - 45 - 67 + 89 = 100$

Задание 2.

Пусть

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + ax + 1) \cdot (x^3 + bx^2 + 1) = x^5 + bx^4 + x^2 + ax^4 + abx^3 + ax + x^3 + bx^2 + 1 = x^5 + (a+b) \cdot x^4 +$$

$$+(a \cdot b + 1)x^3 + (b+1) \cdot x^2 + ax + 1. \text{ Отсюда имеем: } \begin{cases} a + b = 0 \\ ab + 1 = 0 \\ b + 1 = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Задание 3.

$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$, то угол $\alpha = \sqrt{3}$ радиан будет лежать в промежутке

$57,3^\circ \cdot 1,73 < \alpha < 57,3^\circ \cdot 1,74$, то есть $99,13^\circ < \alpha < 99,7^\circ$. То есть угол α лежит во второй четверти, где $\cos \alpha$ отрицательный.

Ответ: меньше нуля.

Задание 4.

$$\begin{aligned} \sqrt{15 + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{35}} &= \sqrt{15 + 2\sqrt{3 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 7} + 2\sqrt{5 \cdot 7}} = \\ &= \sqrt{3 \cdot 5 + 7 + 2\sqrt{3 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 7} + 2\sqrt{5 \cdot 7}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})^2} = \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}. \text{ Имеем: } \sqrt{3} > 1,7; \sqrt{5} > 2,2; \sqrt{7} > 2,6, \text{ поэтому } \sqrt{3} + \end{aligned}$$

$+\sqrt{5} + +\sqrt{7} > 1,7 + +2,2 + 2,6 = 6,5$. Следовательно, первое число (слева) больше второго числа (справа).

Ответ: первое число больше.

Задание 5.

$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 < x^3 + 8x^2 + 42x + 27 < x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x + 4)^3$, поэтому $y = x + 3$. Отсюда, подставляя в уравнение $y = x + 3$, получим:

$$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 8x^2 + 42x + 27 \Rightarrow x^2 = 15x, \text{ т.е. } x = 15 \text{ и тогда}$$

$$y = 18.$$

Ответ: (15,18)

Задание 6.

Имеем: $x^2 - 2x + 3 < \sqrt{4 - x^2}$. Левая часть неравенства ≥ 2 , правая часть неравенства ≤ 2 . Так как при $x = 1$ $(x - 1)^2 + 2 = 2$, а $\sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, то неравенство невозможно.

Ответ: \emptyset

Задание 7.

ОДЗ $\cos x \neq 0, \cos 3x \neq 0$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = 2 \sin 2x (2 \cos 2x - 1) \Rightarrow \sin 2x = 0, \text{ но } \cos x \neq 0,$$

поэтому решение будет $\sin x = 0$, т.е. $x = k\pi$. Сократив на $\sin 2x$, получим

$$\text{уравнение: } \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)} = 2(\cos 2x - 1) \cdot \frac{1}{\cos 2x + \cos 4x} = 2(\cos 2x - 1), \text{ Далее}$$

$$\frac{1}{\cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1} = 2 \cos 2x - 1, \text{ если } \cos 2x = a, \text{ то } (2a - 1)(a + 2a^2 - 1) =$$

$$= 1 \Rightarrow 4a^3 - 3a = 0, \text{ т.е. } \cos 2x = 0 \text{ или } \cos^2 2x = \frac{3}{4}, \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{4}, \cos 4x =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Следовательно, } 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \text{ или } 4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, x_3 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \quad k, m, n \in Z$

Задание 8.

Пусть ABC данный треугольник, отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABE и BEC. Коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$.

Решение:

Раз треугольник ABE подобен BEC один из углов треугольника BEC равен углу AEB, то $\angle BEC + \angle ECB + \angle CBE = \pi$, отсюда следует, что $\angle EBC + \angle BCE = \pi - \angle BEC = \angle AEB$. Тем самым $\angle AEB$ не может равняться ни одному из углов EBC или BCE, поскольку он равен их сумме. Значит, он равен своему смежному $\angle BCE$ и, следовательно, является прямым углом. Далее определим, какому из углов равняется угол BAE. Если $\angle BAE = \angle BCE$, то треугольник ABE и BCE равны по катету и острому углу, т.е. не могут иметь коэффициент подобия $\sqrt{3}$. Этим доказано, что $\angle BAE = \angle ECB$ и $\angle BCE = \angle ABE$, откуда $\angle ABC = \angle ABE + \angle BAE = \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\operatorname{ctg} A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}$